Exercice 1 (3 points) :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
On considère la sphère (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$ et le plan (P) d'équation : $y - z = 0$

0,5 1) a) Montrer que le centre de la sphère (S) est $\Omega(1, 1, 1)$ et que son rayon est $R = 2$
0,5 b) Calculer $d(\Omega, (P))$, puis en déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C)
0,5 c) Déterminer le centre et le rayon du cercle (C)
2) Soit (Δ) la droite passant par $A(1, -2, 2)$ et orthogonale au plan (P)
0,25 a) Montrer que le vecteur $\vec{u}(0, 1, -1)$ dirige la droite (Δ)
1 b) Montrer que : $\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{2}\|\vec{u}\|$, et en déduire que la droite (Δ) couple la sphère (S) en deux points
0,75 c) Déterminer le couple de coordonnées de chacun des points d'intersection de (Δ) et (S)

Exercice 2 (3 points) :

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 5 boules blanches, 3 rouges et 2 vertes

1,5 1) On tire au hasard et simultanément 4 boules de l'urne et soit les événements :
A : « Parmi les boules tirées, il existe exactement une boule verte »
B ; « Parmi les boules tirées ; il existe exactement 3 boules de même couleur »
Montrer que : $p(A) = \frac{8}{15}$ et $p(B) = \frac{19}{70}$
2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes tirées
0,5 a) Montrer que : $p(X = 3) = \frac{2}{15}$
1 b) Déterminer la loi de probabilité de X et montrer que : $E(X) = \frac{4}{5}$

Prof_Rabie_Maths
www.profrabiemaths.com

Exercice 3 (3 points) :

0,75 1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 4z + 8 = 0$
2) On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ les points A , B , C d'affixes respectives $a = -2 + 2i$, $b = 4 - 4i$, $c = 4 + 8i$
0,5 a) Soit R la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On désigne par z' l'affixe du point M' d'un point M d'affixe z. Montrer que : $z' = -iz - 4$
0,75 b) Vérifier que le point B est l'image du point C par R et en déduire la nature du triangle ABC
3) Soit ω l'affixe du milieu de segment [BC]
0,5 a) Montrer que : $|c - \omega| = 6$
0,5 b) Montrer que l'ensemble des points M(z) tels que : $|z - \omega| = 6$ est le cercle circonscrit au triangle ABC

Exercice 4 (2,5 points) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 17 \quad et \quad u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 1) a) Montrer par récurrence que : $u_n > 16$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 b) Montrer que (u_n) est décroissante, puis en déduire que la suite (u_n) est convergente

2) Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_n = u_n - 16$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique

0,5 b) En déduire que : $u_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$, puis déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

0,5 c) Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle : $u_n < 16{,}0001$

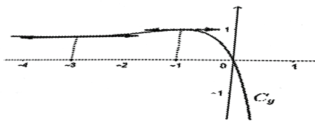
Prof_Rabie_Maths
www.profrabiemaths.com

Problème (8,5 points) :

I. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - (x+1)^2 e^x$

0,25 1) Vérifier que : $g(0) = 0$

1 2) D'après la courbe de la fonction g (voir la figure ci-contre)



Montrer que pour tout x de $]-\infty, 0]$, $g(x) \geq 0$

Et que pour tout x de $[0, +\infty[$, $g(x) \leq 0$

II. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + 1 - (x^2+1)e^x$

Et soit (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 2 cm)

0,75 1) a) Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = x + 1 - 4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$ puis en déduire que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

0,5 b) Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x+1)]$ et en déduire que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

0,25 c) Montrer que la courbe (C_f) est en dessous de la droite (D)

0,5 2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (on pourra écrire f(x) sous la forme $x\left[1 + \frac{1}{x} - \left(x + \frac{1}{x}e^x\right)\right]$)

0,25 b) Montrer que la courbe (C_f) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on déterminera la direction

0,75 3) a) Montrer que : $f'(x) = g(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$

0,75 b) Montrer que la fonction f est croissante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

0,75 c) Montrer que la courbe (C_f) admet deux points d'inflexion d'abscisse -3 et -1

1 4) Construire, dans le même repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la droite (D) et la courbe (C_f)

(on rendra $f(-3) \approx -2{,}5$ et $f(-1) \approx -0{,}75$)

5) a) Vérifier que : $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction

0,5 $h : x \mapsto (x-1)e^x$ sur $\mathbb{R}$ puis montrer que : $\int_{-1}^{0} xe^x\,dx = \frac{2}{e} - 1$

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par partie, que : $\int_{-1}^{0} (x^2+1)e^x dx = 3\left(1 - \frac{2}{e}\right)$

0,75 c) Calculer, en cm², l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f), la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation x = - 1

0,75